

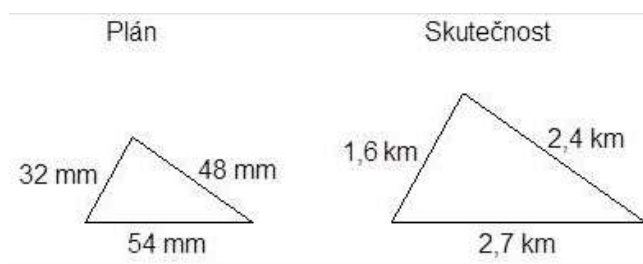
3.Podobnost, věty o podobnosti

Opakování osově a středové souměrnosti PS G str. 4 – 7

Co může být podobné?

- sourozenci
- plány domu
- fotografie a její zvětšenina
- mapy států
- stříhy o různých velikostech na stejné kalhoty...

Podobnost lze popsat i matematicky.



Dva geometrické útvary nazýváme **podobné**, jestliže poměry délek všech dvojic odpovídajících si úseček těchto útvarů se rovnají témuž číslu $k > 0$. Toto číslo nazýváme **poměr podobnosti**.

Zapišeme: rovinný útvar O_1 je podobný s O_2

$$O_1 \sim O_2$$

Každé dva odpovídající si úhly podobných útvarů jsou **shodné**.

Podobné zobrazení,

je takové zobrazení, ve kterém pro vzdálenost dvou obrazů X', Y' libovolných dvou bodů (vzorů) X, Y platí:

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|, \text{ kde } k \text{ je libovolné kladné reálné číslo různé od nuly.}$$

V podobném zobrazení obrazem úsečky je úsečka, polopřímky je polopřímka, přímky je přímka, úhlu je úhel.

POMĚR PODOBNOSTI k

$$|X'Y'| : |XY| = k$$

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|$$

$$\text{resp. } k = a'/a = b'/b = c'/c$$

$a', b', c' \dots$ obrazy; $a, b, c \dots$ vzory

Vyjadřuje přímou úměrnost délek odpovídajících si úseček

Platí:

$k > 1 \dots \dots \dots$ zvětšení

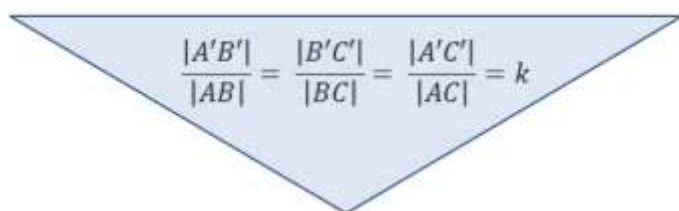
$0 < k < 1 \dots \dots \dots$ zmenšení

$k = 1 \dots \dots \dots$ shodnost

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

- trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, pokud existuje takové kladné číslo k , že platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB| \quad |B'C'| = k \cdot |BC| \quad |A'C'| = k \cdot |AC|$$


$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$

- $k > 1$

– podobnost představuje zvětšení



- $0 < k < 1$

– podobnost představuje zmenšení



- $k = 1$

– shodnost

Speciální věty

- pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, pokud se shodují v jednom ostrém úhlu nebo v poměru délek dvou odpovídajících si stran
- rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, pokud se shodují v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu
- každé rovnostranné trojúhelníky jsou podobné

Př.1: Trojúhelníky ABC , KLM , PQR , XYZ jsou dány délkami stran:

$$\Delta ABC: a = 6 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c = 3 \text{ cm}$$

$$\Delta KLM: k = 12 \text{ cm}, l = 8 \text{ cm}, m = 5 \text{ cm}$$

$$\Delta PQR: p = 9 \text{ cm}, q = 6 \text{ cm}, r = 4,5 \text{ cm}$$

$$\Delta XYZ: x = 3 \text{ cm}, y = 2 \text{ cm}, z = 1,5 \text{ cm}$$

Určete dvojice podobných trojúhelníků a rozhodněte, zda se jedná o zvětšení nebo zmenšení.

Řešení: Dáme do poměru nejdelší stranu obrazu a vzoru, nejmenší stranu obrazu a vzoru a nakonec prostřední stranu obrazu a vzoru.

ΔABC a ΔKLM

$$k : a = 12 : 6 = 2$$

$$l : b = 8 : 4 = 2$$

$$m : c = 5 : 3 = 1,66$$

Δ nejsou podobné

ΔABC a ΔPQR

$$p : a = 9 : 6 = 1,5$$

$$q : b = 6 : 4 = 1,5$$

$$r : c = 4,5 : 3 = 1,5$$

**Δ jsou podobné; $k = 1,5 > 1 \Rightarrow$ zvětšení
podobné tr.**

Je možné naryšovat

ΔABC a ΔXYZ

$$x : a = 3 : 6 = 0,5$$

$$y : b = 2 : 4 = 0,5$$

$$z : c = 1,5 : 3 = 0,5$$

Δ jsou podobné; $k = 0,5 < 1 \Rightarrow$ zmenšení

ΔKLM a ΔPQR

$$p : k = 9 : 12 = 0,75$$

$$q : l = 6 : 8 = 0,75$$

$$r : m = 4,5 : 5 = 0,9$$

Δ nejsou podobné

ΔKLM a ΔXYZ

$$x : k = 3 : 12 = 0,25$$

$$y : l = 2 : 8 = 0,25$$

$$z : m = 1,5 : 5 = 0,3$$

Δ nejsou podobné

ΔPQR a ΔXYZ

$$x : p = 3 : 9 = 1/3$$

$$y : q = 2 : 6 = 1/3$$

$$z : r = 1,5 : 4,5 = 1/3$$

Δ jsou podobné; $k = 1/3 < 1 \Rightarrow$ zmenšení

♣♣♣ PS G 8/1 - 3

Věty o podobnosti trojúhelníků

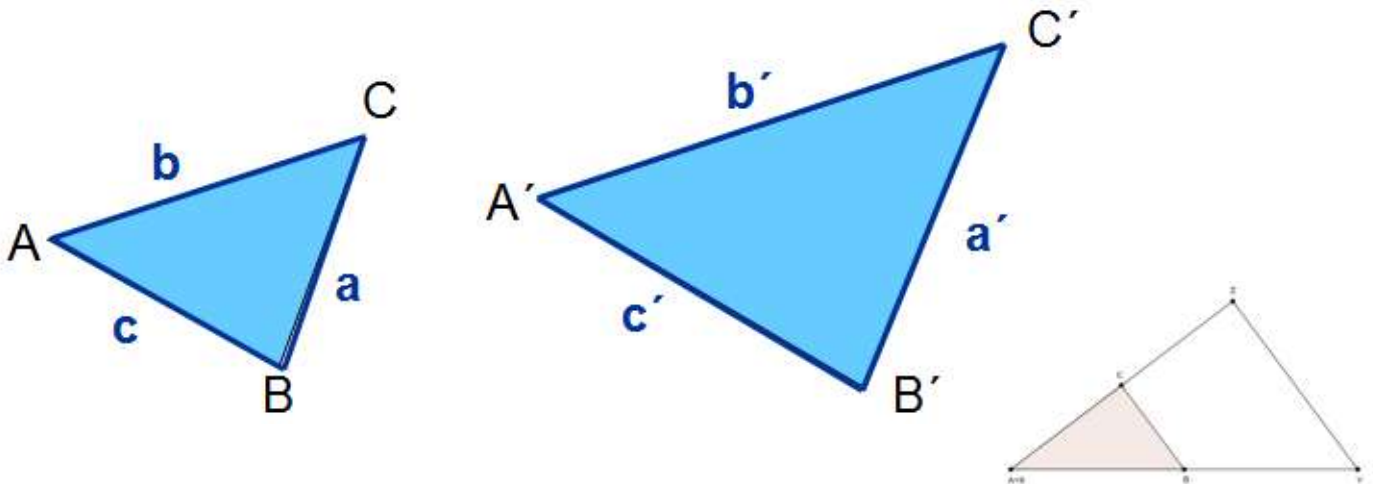
Označují se podobně jako věty o shodnosti trojúhelníků. **sss, sus, uu**

Označení věty zkratkou vyjadřuje, kterými údaji trojúhelníky porovnáváme.

VĚTA sss

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran, jsou podobné.

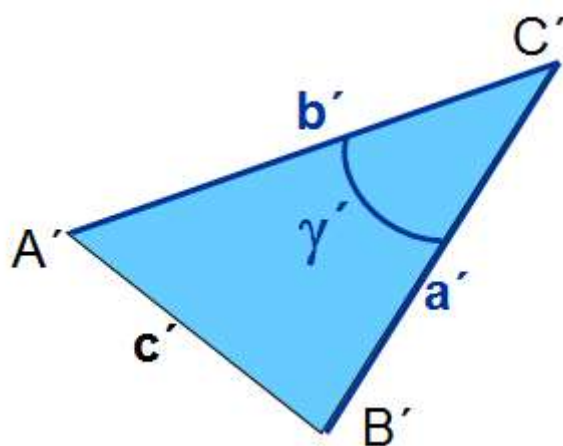
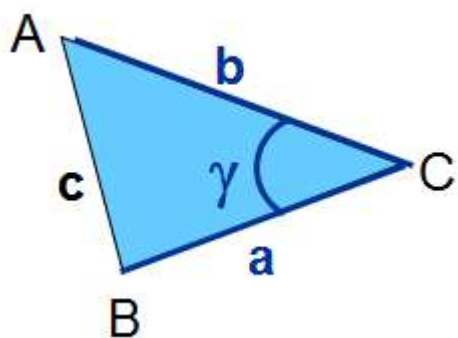
$$a' : a = b' : b = c' : c = k$$



VĚTA sus

Každé dva trojúhelníky, které mají sobě rovné poměry délek dvou odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, jsou podobné.

$$a' : a = b' : b = k \quad \gamma \cong \gamma'$$

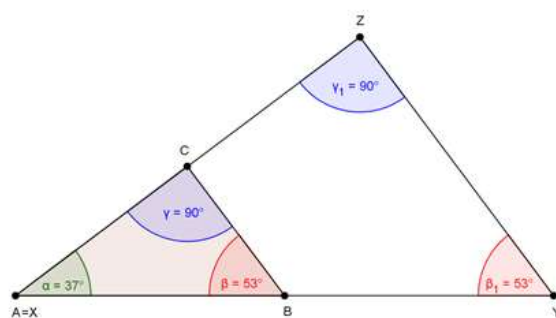
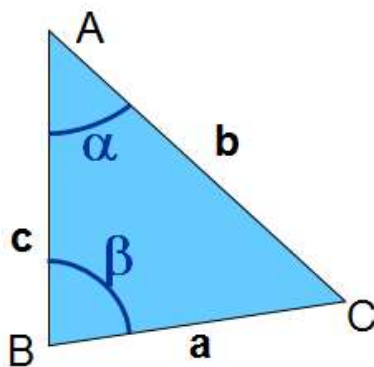
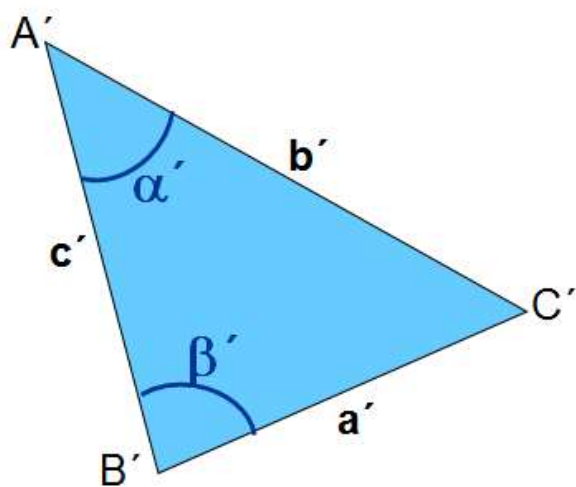


VĚTA uu

Každé dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

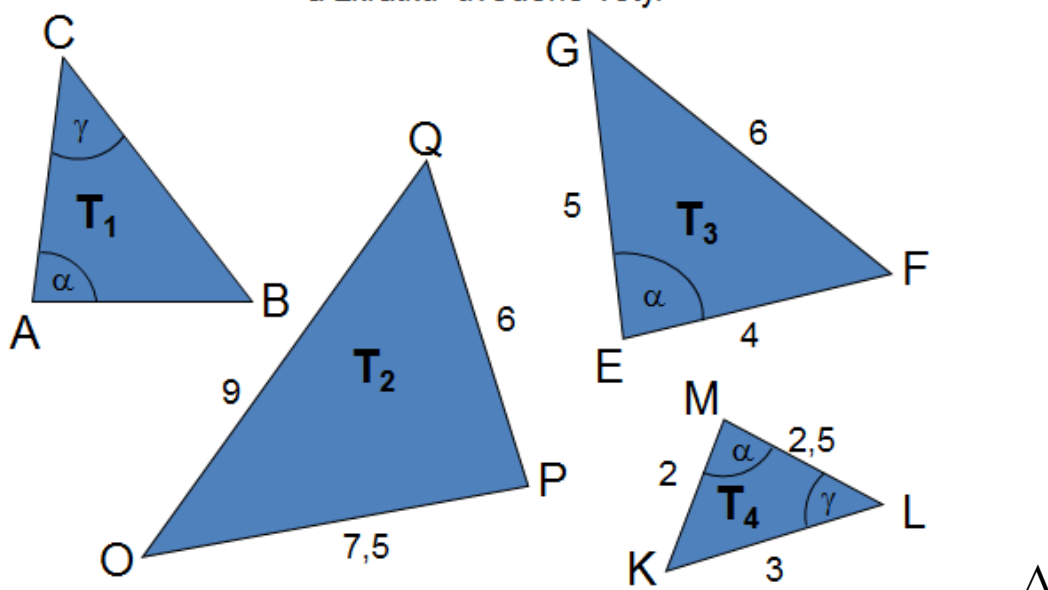
$$\alpha \cong \alpha'$$

$$\beta \cong \beta'$$



Př.2:

Najdi dvojice podobných trojúhelníků, zapiš podobnost a zkratku uvedené věty.



Řešení:

$$\triangle ABC \sim \triangle MKL \text{ (uu)}$$

$$\triangle OPQ \sim \triangle GEF \text{ (sss; } k = 2/3)$$

$$\triangle EFG \sim \triangle MKL \text{ (sss; } k = 1/2)$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQO \sim \triangle MKL \sim \triangle EFG$$

Př.3: Trojúhelníky ABC a TUV mají strany délky $a = 8,8 \text{ cm}$, $b = 5,6 \text{ cm}$, $c = 4,2 \text{ cm}$, $t = 84 \text{ mm}$, $u = 132 \text{ mm}$, $v = 63 \text{ mm}$.

Zjistěte, zda jsou podobné. Jestliže ano, zapište zkratku věty, určete poměr podobnosti a zapište tuto podobnost.

Pozor na odpovídající si strany!!!

Řešení: podobnost podle sss

$$u : a = 132 : 88 = 1,5$$

$$t : b = 84 : 56 = 1,5$$

$$v : c = 63 : 42 = 1,5$$

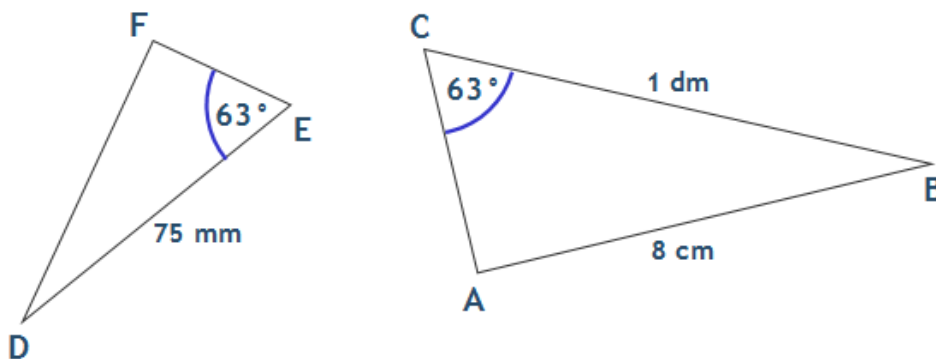
$$\Rightarrow k = 1,5 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle UTV$$

Př.4: Trojúhelníky ABC a A'B'C' jsou podobné: $a = 18 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $|\angle B'C'A'| = 60^\circ$, $a' = 6 \text{ cm}$. Urči poměr podobnosti a délku strany b'.

$$k = a' : a = 6 : 18 = 1/3$$

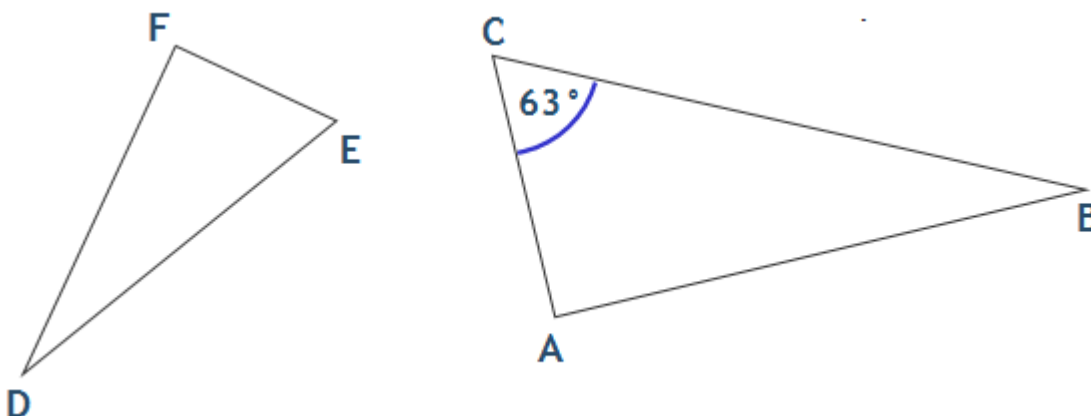
$$b' = k \cdot b = 1/3 \cdot 15 = 5 \text{ cm}$$

Př.5: Urči, zda jsou pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEF podobné. Pokud ano, urči velikost strany $|DF|$.



Ano (uu), $k = 75:100 = 0,75$
 $|DF| = k \cdot 8 \text{ cm} = 0,75 \cdot 8 = 6 \text{ cm}$.

Př.6: Pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEF jsou podobné: Urči velikost úhlu $|\angle FDE|$ a uveď, na základě které věty o podobnosti trojúhelníků jsou podobné.



$\varepsilon = 63^\circ$;
 $|\angle FDE| = 180^\circ - (90^\circ + 63^\circ) = 27^\circ$; věta uu.

Př.7: O obdélnících $KLMN$ a $EFGH$ víte, že jsou podobné. Pro $|KL| = 5 \text{ m}$, $|LM| = 4 \text{ m}$, $|EF| = 12,5 \text{ m}$ určete poměr podobnosti a vypočítejte délku strany FG .

Řešení:

$$|EF| : |KL| = 12,5 : 5 = 2,5$$

$k = 2,5$

zvětšení

$$|FG| : |LM| = 2,5$$

$$|FG| = 2,5 \cdot |LM|$$

$$|FG| = 2,5 \cdot 4$$

$$|FG| = 10 \text{ m}$$

Př.8: Obdélník O_1 má strany o délkách $a = 2,5 \text{ dm}$, $b = 5 \text{ dm}$. Vypočítejte rozměry podobného obdélníku O_2 , je-li poměr podobnosti $k = 4$.

Dále vypočítejte poměr obsahů obdélníků O_2 , O_1 a porovnejte ho s poměrem podobnosti stran.

Řešení:

$$a' : a = 4$$

$$a' = 4 \cdot 2,5$$

$$a' = 10 \text{ dm}$$

$$b' : b = 4$$

$$b' = 4 \cdot 5$$

$$b' = 20 \text{ dm}$$

obsahy:

$$S' = a' \cdot b'$$

$$S' = 10 \cdot 20$$

$$S' = 200 \text{ dm}^2$$

$$S = a \cdot b$$

$$S = 2,5 \cdot 5$$

$$S = 12,5 \text{ dm}^2$$

$$S' : S = 200 : 12,5 = 16$$

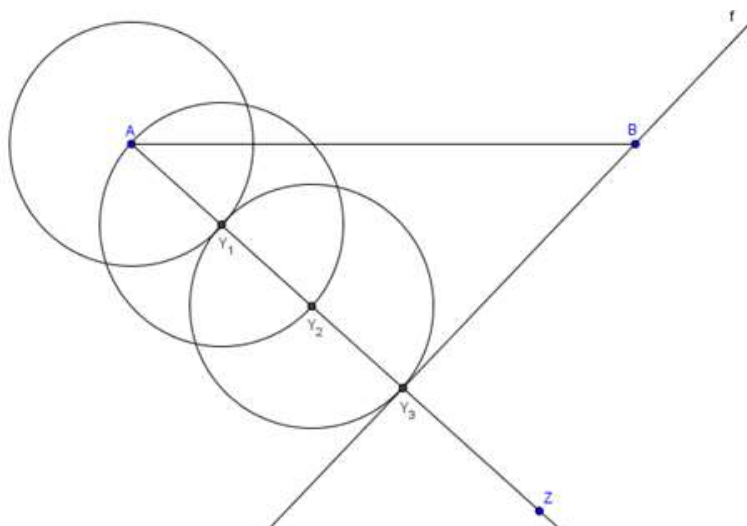
Poměr obsahů podobných rovinných útvarů = k^2

♣♣♣ PS G 10/4 - 15

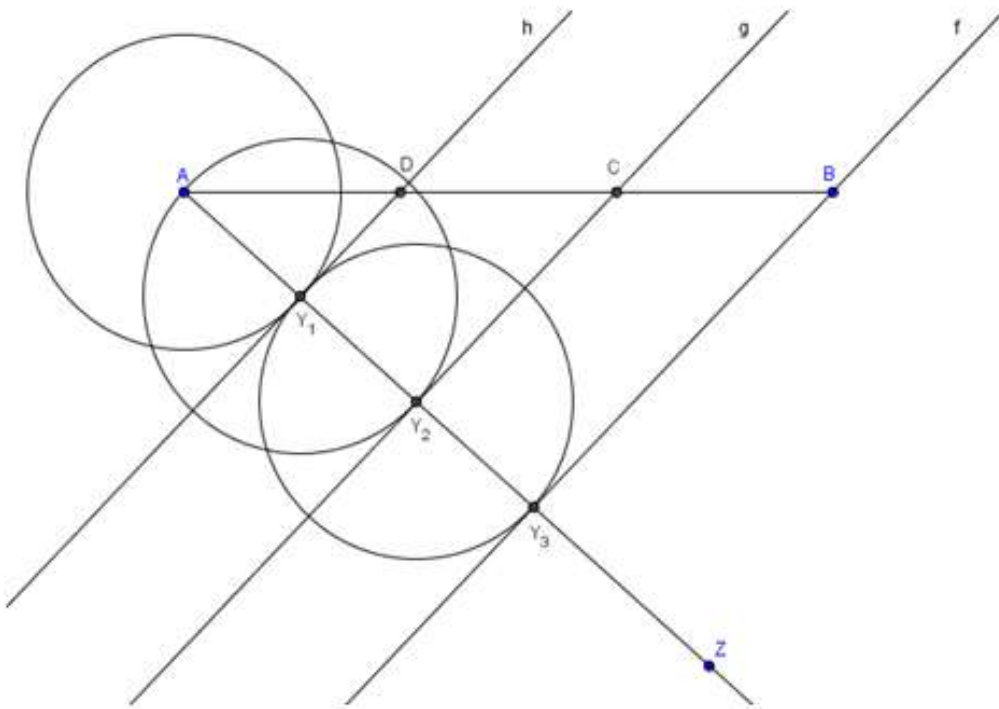
DĚLENÍ ÚSEČKY

a) Na stejné díly

Př. 9: Rozděl danou úsečku AB neznámé délky na 3 stejné části:



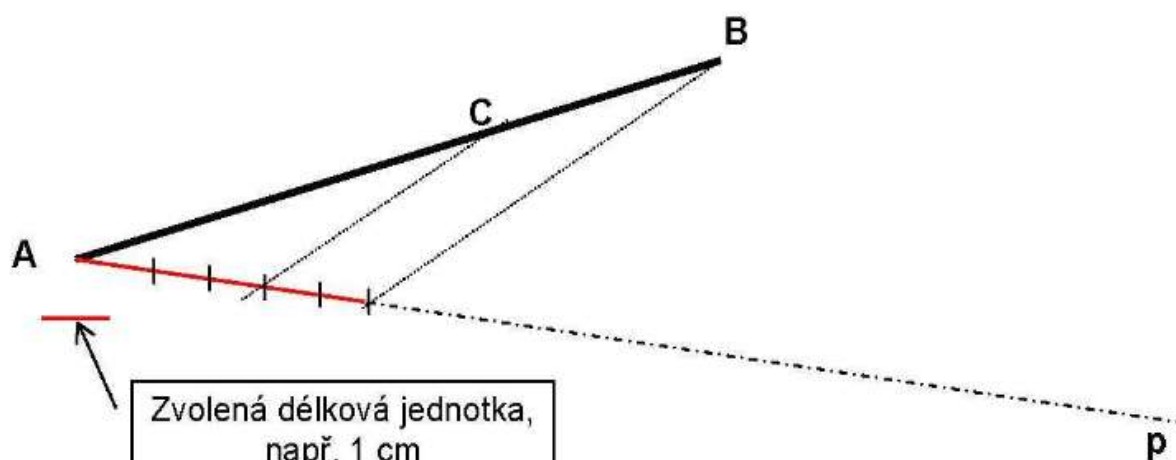
- 1) Sestrojíme polopřímku z krajního bodu A pod úhlem přibližně 45° .
- 2) Na polopřímce AZ sestrojíme přesnou stupnici, v našem případě sestávající ze tří stejných dílků.
- 3) Máme tedy tři stejné dílky AY_1 , Y_1Y_2 a Y_2Y_3 .
- 4) Spojíme nyní třetí z nich Y_3 s bodem B .
- 5) Nyní sestrojíme rovnoběžky s přímkou f procházející body Y_2 a Y_1 .
- 6) V průsečíku rovnoběžek se zadanou úsečkou AB vznikly body C a D , které nám rozdělily danou úsečku na tři stejné části.
- 7) Obdobným postupem můžeme rozdělit libovolnou úsečku na libovolný počet stejných částí.



b) Na díly v daném poměru

Př.10:

Rozdělte úsečku AB neznámé délky na dvě části v poměru 3 : 2.



Platí: $|AC| : |CB| = 3 : 2$

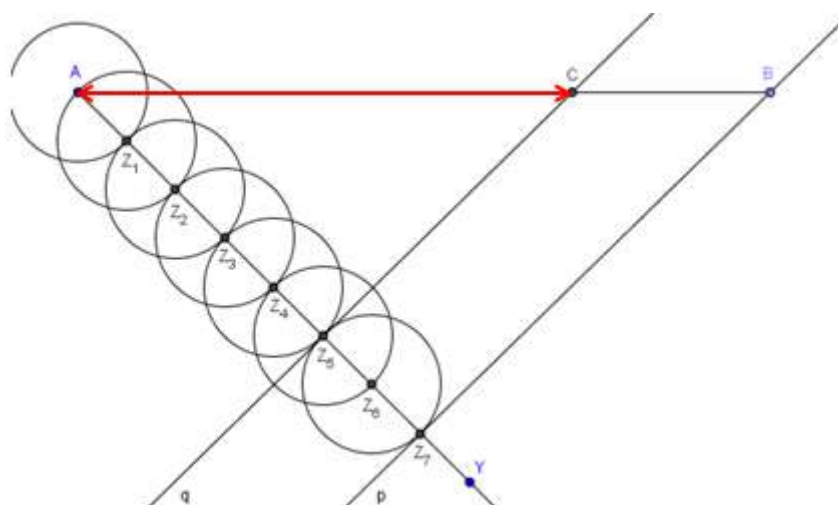
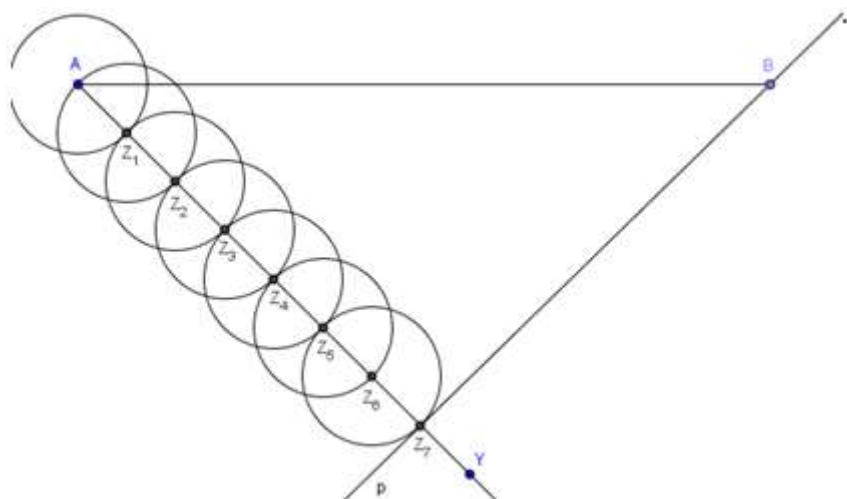
♣♣♣ [PS G 18/2](#)

ZMĚNA ÚSEČKY (ZMENŠENÍ, ZVĚTŠENÍ) V DANÉM POMĚRU

Př.11: Zmenši úsečku $|AB|=10$ cm v poměru 5:7.

Postup:

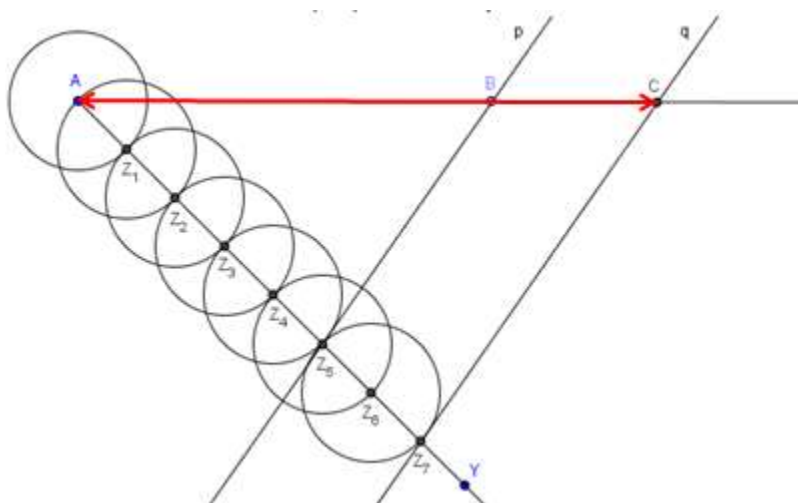
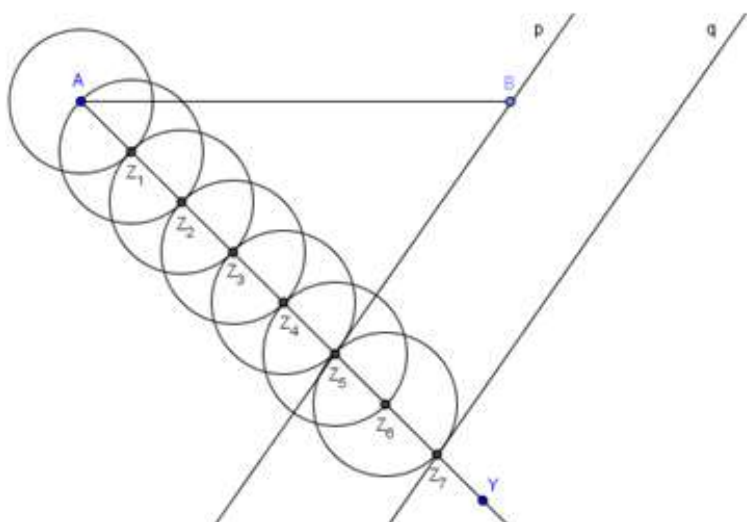
- 1) Narýsujeme úsečku zadané velikosti
- 2) U jednoho z krajních bodů úsečky sestrojíme polopřímku (libovolný ostrý úhel, ideálně o velikosti okolo 45° - např. v bodě A).
- 3) Na polopřímce, pomocném rameni, si zvolíme stupnici (většinou 1 dílek = 1 cm nebo 0,5 cm) podle kružítka či pravítka.
- 4) Díl, který odpovídá zadané úsečce (zde se jedná o zmenšení, protože $5/7 < 1$, a tak spojíme s bodem B bod 7), spojíme s druhým krajním bodem úsečky (s bodem B).
- 5) Podíváme se, kolik dílů má mít nová úsečka (zde 5 dílů), a z tohoto dílu 5 vedeme rovnoběžku s přímkou sestrojenou v předcházejícím bodě.
- 6) Průsečík této rovnoběžky a zadané úsečky je bod, který je novým krajním bodem zmenšené (zmenšené úsečky).



Př. 12: Změňte úsečku $|AB|=57$ mm v poměru 7:5.

Postup:

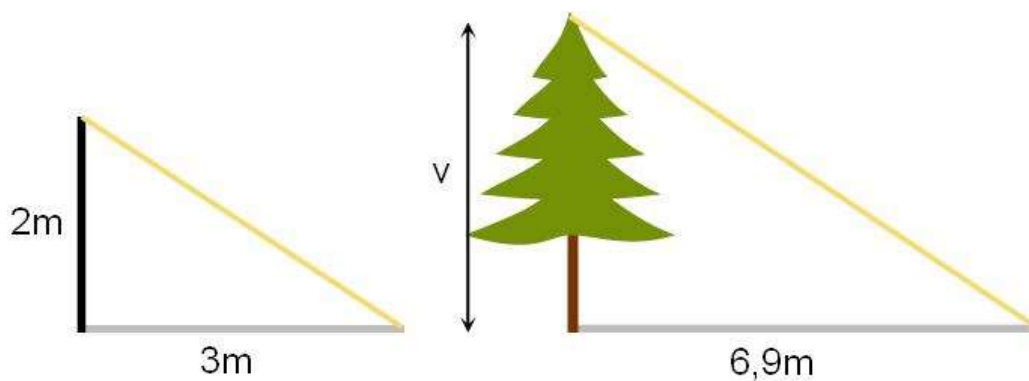
- 1) Narýsujeme úsečku zadané velikosti
- 2) U jednoho z krajních bodů úsečky sestrojíme polopřímku (libovolný ostrý úhel, ideálně o velikosti okolo 45° - např. v bodě A).
- 3) Na polopřímce, pomocném rameni, si zvolíme stupnici (většinou 1 dílek = 1 cm nebo 0,5 cm) podle kružítka či pravítka.
- 4) Díl, který odpovídá zadané úsečce (zde se jedná o zvětšení, protože $7/5 > 1$, a tak spojíme s bodem B bod 5), spojíme s druhým krajním bodem úsečky (s bodem B).
- 5) Podíváme se, kolik dílů má mít nová úsečka (zde 7 dílů), a z tohoto dílu 7 vedeme rovnoběžku s přímkou sestrojenou v předcházejícím bodě.
- 6) Průsečík této rovnoběžky a zadané (prodloužené) úsečky je bod, který je novým krajním bodem změněné (zvětšené úsečky).



♣♣♣ PS G 18/3 - 5

UŽITÍ PODOBNOSTI

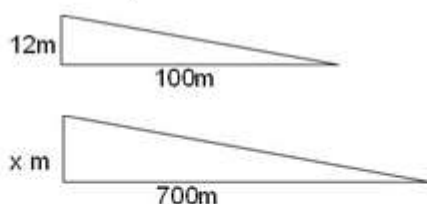
Př.13: Dvoumetrová tyč vrhá stín dlouhý 3m. Délka stínu stromu je 6,9 m. Vypočítej výšku stromu. (Načrtni si obrázek.)



Sluneční paprsky jsou rovnoběžné, a proto jsou vzniklé trojúhelníky podobné (uu). Vypočítáme nejdřív poměr podobnosti $k = 6,9 : 3 = 2,3$ a potom vypočítáme výšku stromu $v = k \cdot 2 = 2,3 \cdot 2 = 4,6\text{m}$

Strom je vysoký 4,6m.

Př. 14: Výstražná značka udává nebezpečné klesání. 12% udává, že na každých 100 m délky ve vodorovném směru silnice klesá o 12 m. Jaký je výškový rozdíl mezi místem, které je označeno touto značkou, a místem, kde po 700 m nebezpečné klesání končí? (Načrtni si obrázek.)

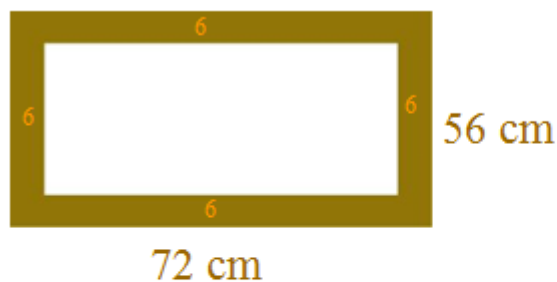


$$\frac{x}{12} = \frac{700}{100}$$

$$x = 84\text{ m}$$

Výškový rozdíl je 84m.

Př.15: Rám obrazu je zhotoven z lišty široké 6 cm. Rozměry obrazu jsou 72 cm a 56 cm. Jsou vnitřní a vnější hranice rámu dva podobné obdélníky? (Načrtni si obrázek.)



$$\frac{60}{72} = \frac{44}{56}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{11}{14}$$

$$\frac{35}{42} \neq \frac{33}{42}$$

Jaké jsou rozměry vnitřní hrany?

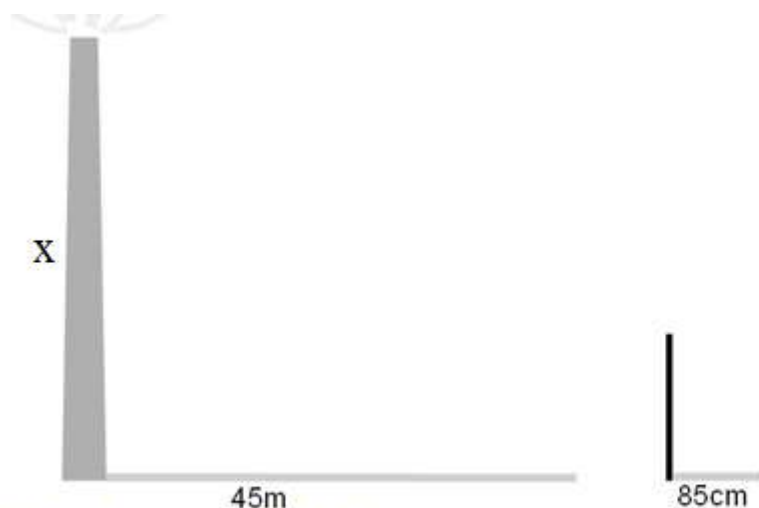
$$72 - 2 \cdot 6 = 60\text{ cm}$$

$$56 - 2 \cdot 6 = 44\text{ cm}$$

šířka rámu

Obdélníky nejsou podobné.

Př. 16: Komín neznámé výšky vrhá stín 45 m dlouhý, metrová tyč stojící kolmo k povrchu má stín dlouhý 85 cm. Vypočítej výšku komína. (Načrtni si obrázek.)



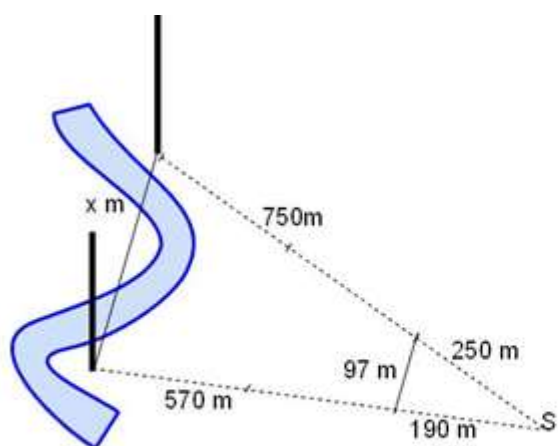
$$\frac{1}{x} = \frac{0,85}{45}$$

$$x = \frac{45}{0,85}$$

$$x = 53 \text{ m}$$

Komín je vysoký 53 m.

Př.17: Ohyb řeky nedovoluje přímo změřit vzdálenost stožárů. Jak budeš postupovat, abys tuto vzdálenost mohl(a) určit? (Načrtni si obrázek.)



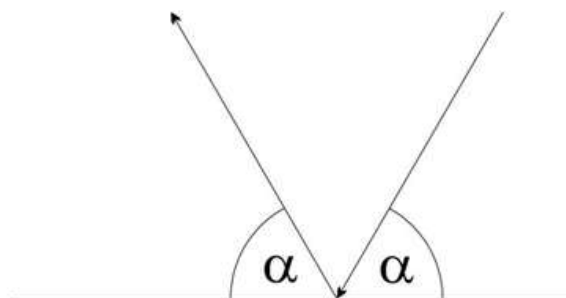
$$\frac{97}{x} = \frac{250}{750}$$

$$x = \frac{97 \cdot 750}{250}$$

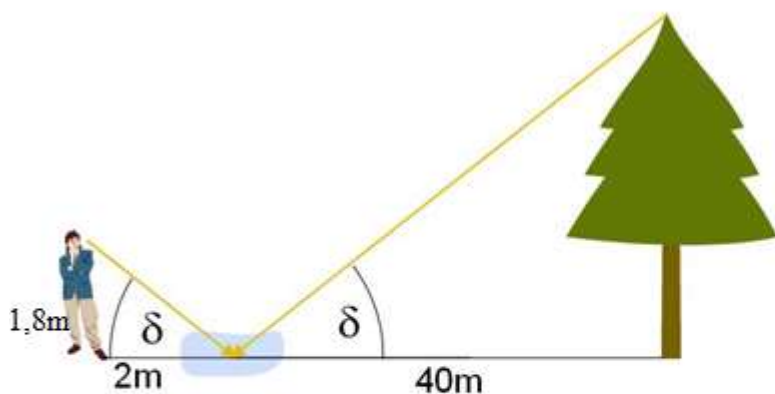
$$x = 291 \text{ m}$$

Stožáry jsou od sebe vzdáleny 291 m.

Úhel odrazu se rovná úhlu dopadu.



Př.18: Vršek stromu se zrcadlí v kaluži, která je vzdálená 40 m. Ty stojíš od této kaluže 2 m. Jak vysoký je strom? (Načrtni si obrázek.)



$$\frac{v}{1,8} = \frac{40}{2}$$

$$v = \frac{40 \cdot 1,8}{2}$$

$$v = 36 \text{ m}$$

Jsou vzniklé trojúhelníky podobné?

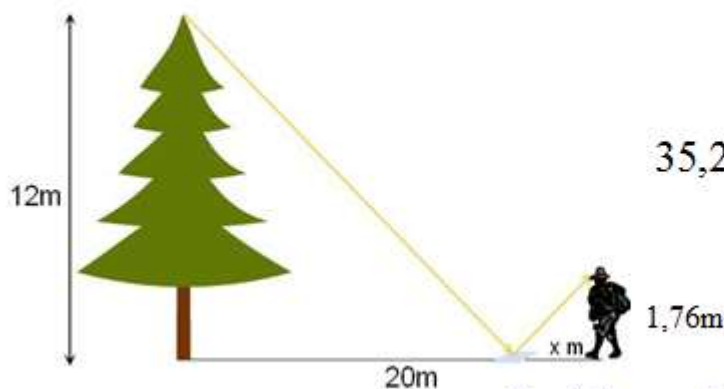
ANO, podle které věty? uu

Strom je vysoký 36 m.

Co ještě potřebuješ znát? Svou výšku.

Př.19:

Stojíš 20 m od stromu. Jak daleko od sebe položíš zrcátko, abys v něm viděl(a) vršek stromu, který má výšku 12 m? (Načrtni si obrázek.)



$$\frac{1,76}{12} = \frac{x}{20 - x}$$

$$35,2 - 1,76x = 12x$$

$$x = 2,56 \text{ m}$$

Zrcátko položíš 2,56 m od sebe.

Co ještě potřebuješ znát? Svou výšku.

MĚŘÍTKO PLÁNU A MAPY

Měřítko 1 : 30 000 znamená, že 1 cm na mapě představuje 30 000 cm = 300 m ve skutečnosti

Př.20: Vzdálenost Chrudimě a Pardubic je 12 km. Na mapě jsou tato města od sebe 3 cm daleko. Urči měřítko mapy.

Postup:

1. Napiš poměr vzdálenosti dvou míst na mapě a jejich vzdálenosti ve skutečnosti
2. Převeď na stejné jednotky
3. Zkrať tento poměr do základního tvaru, výsledkem je měřítko mapy

$$\underbrace{3 \text{ cm} : 12 \text{ km}}_{\text{ZADÁNÍ}} = \underbrace{3 \text{ cm} : 1\,200\,000 \text{ cm}}_{\text{PŘEVOD NA STEJNÉ JEDNOTKY}} = \underbrace{1 : 400\,000}_{\text{MĚŘÍTKO PO ZKRÁCENÍ}}$$

Př. 21:

Urči vzdálenost dvou míst na mapě,
jestliže znáš jejich vzdálenost ve skutečnosti a měřítko dané mapy.

- **Postup:** Vzdálenost dvou míst ve skutečnosti **změň v poměru**, který představuje měřítko mapy, výsledek uveď v menších jednotkách vhodných pro mapu (cm, mm)
- **Příklad:** Jaká je vzdálenost Prahy a Chrudimě na mapě v měřítku 1 : 500 000, je-li jejich vzdálenost ve skutečnosti 110 km.

$$110 \text{ km} \cdot \frac{1}{500000} = 11\,000\,000 \text{ cm} \cdot \frac{1}{500000} = 22 \text{ cm}$$

Př.22:

Urči vzdálenost dvou míst ve skutečnosti,
jestliže znáš jejich vzdálenost na mapě a měřítko dané mapy.

- **Postup:** Vzdálenost dvou míst na mapě **změň v poměru**, který je převráceným poměrem k měřítku mapy, výsledek uveď ve větších jednotkách vhodných pro skutečnou vzdálenost (m, km)
- **Příklad:** Jaká je skutečná vzdálenost měst Chrudim a Hradec Králové, je-li jejich vzdálenost na mapě v měřítku 1 : 250 000 rovna 12 cm

$$12 \text{ cm} \cdot \frac{250000}{1} = 3\,000\,000 \text{ cm} = 30 \text{ km}$$

PL měřítko mapy (lze tímto podobnost začít)

♣♣♣ PS G 19/6 - 11